К.С. Лук'яненко, магістрант
Науковий керівник – проф., к.ф.-м.н. С.І. Яремчук
Житомирський державний технологічний університет

ДРУГИЙ АЛГОРИТМ ГОМОРІ В РОЗВ'ЯЗАННІ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ

Задача розміщення джерел фізичного поля на фіксовані місця виникають в промисловості. Так, наприклад, при компоновці мікроелектронної апаратури має місце проблема забезпечення заданого теплового режиму. Наприклад, забезпечення максимальної рівномірності температури на поверхні підложки, задача забезпечення мінімального перегріву елементів схеми, тощо.

Саме до таких задач відноситься мінімаксна задача розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця, яка вперше була поставлена Стояном Ю.Г. та Путятиним В.П. у 70х роках [1].

Змістовна постановка задачі. Є область $\Omega \in R^n; N$ джерел фізичного поля D_i , $i \in [1:N]$; N посадкових місць $n^j \in \Omega$, $j \in [1:N]$ та K контрольних точок $y^k \in \Omega$, $k \in [1:K]$. Необхідно розмістити джерела фізичного поля на посадкові місця таким чином, щоб максимальне із значень поля в контрольних точках було найменшим. Кожне джерело повинно займати одне посадкове місце та на одне посадкове місце повинно призначатися лише одне джерело.

Математична постановка задачі (була запропонована Стояном Ю.Г. та Путятиним В.П.). Вводиться вектор $Z = \left(Z^1, Z^2, ..., Z^N\right)$, який задає розміщення джерел, Z^i визначає положення $i-того$ джерела в області і співпадає з координатами його полюсу $p^i, i \in [1:N]$.

Фізичне поле описується таким чином:

$$Lu = f(y, Z),$$
$$B_j u = \varphi, \quad j \in [1:J],$$

де L, B_j, $j \in [1:J]$ – лінійні диференційні оператори,

$$f(y,Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), & якщо \;\; y \in D_i \\ 0, & якщо \;\; y \in \bigcup\limits_{i=1}^{N} D_i \end{cases}$$

$$f(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z) \to \min$$

Авторами цієї моделі було побудовано для розв'язання її гібридний метод, який складається з трьох частин(етапів): метод випадкового пошуку Монте-Карло; метод околів, що звужуються; метод вектора спаду.

Швидкість збіжності цього методу дуже низька, так як розв'язання крайової задачі математичної фізики займає багато часу, а в даному алгоритмі це розв'язання неодноразово виконується на кожній ітерації кожного з трьох етапів. Таким чином, навіть при невеликій розмірності задачі час розв'язання був дуже великим.

В зв'язкуз цим актуальною була побудова інших методів. В рамках семінару «Математичні моделі та методи оптимізації розділених систем з дискретними джерелами фізичного поля» було розроблено наступну математичну модель задачі, яка має зручний вид для розв'язання [2].

Керовані змінні:

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, якщо \;\; i-те \;\; джерело \;\; не \;\; призначається \;\; на \;\; j-те \;\; місце \\ 1, якщо \;\; i-те \;\; джерело \;\; призначається \;\; на \;\; j-те \;\; місце \end{cases}$$

Обмеження:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, & j \in [1:N] \\ \sum\limits_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, & i \in [1:N] \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i \in [1:N], \; j \in [1:N]$$

Функція цілі:

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min$$

де $f_k(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} c_{ij}^k$, c_{ij}^k *– вклад* i *– того джерела, що знаходиться на* j *– тому посадковому місці, в значення поля в* k *– й контрольній точці.*

Для цієї математичної моделі було побудовано метод «Р-алгоритм» [2]. Час роботи цього алгоритму суттєво залежить від кількості точок контролю. В подальшому було отримано наступну модифікацію цієї моделі [3].

Функція цілі:

Значення фізичного поля в *k-й* контрольній точці має наступний вигляд:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}, \quad k \in [1:K]$$

Тоді функція цілі може бути записана так:

$$f(x) = \max_{k \in [1:N]} f_k(x) \to \min \tag{1}$$

На основі ідеї Зойтендейка (1) перетворюється таким чином:

$$f_k(x) \le z, \quad k \in [1:K]$$

$$f(x, z) = z$$

В результаті математична модель набуває наступного вигляду:

$$z \to \min \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} c_{ij}^k \le z, \quad k \in [1:K] \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N] \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N] \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i \in [1:N], \quad j \in [1:N] \tag{4}$$

Задача (2)–(4) відноситься до класу задач частковоцілочисельного лінійного програмування. Для її розв’язання можуть застосовуватись класичні методи математичного програмування. Було запропоновано для розв’язання задач модифікований метод Ленд і Дойг [4]. Час роботи зазначеного методу мало залежить від кількості контрольних точок, але суттєво від кількості посадкових місць.

Потрібно побудувати метод, швидкодія якого мало залежить як від кількості контрольних точок, так і від кількості посадкових місць. Тому на даний момент програмно реалізується розв’язання задачі (2)–(4) алгоритмом Гоморі (II) з використанням паралельних обчислень.

В подальшому планується отримати порівняльні характеристики часу роботи зазначених алгоритмів і визначити який з них має велику швидкодію.