Таценко В.О., аспірант
Науковий керівник: ***Яремчук С.І., к.ф.-м. н. професор,***
Житомирський державний технологічний університет

МІНІМАКСНА ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ НА ФІКСОВАНІ ПОСАДКОВІ МІСЦЯ

При проектуванні нових технічних систем важливо отримати результат, який задовольняє наперед заданим обмеженням, накладеним на параметри системи, та при якому значення обраного критерію якості набуває найкращого значення. Зазвичай, ця задача значно спрощується завдяки використанню CAD/CAE систем, проте в сучасній промисловості часто виникають оптимізаційні задачі такої складності, що існуючі системи виявляються неспроможними запропонувати оптимальний розв’язок за прийнятний час. Тому особлива увага прикута до побудови математичних моделей практичних задач, для яких розроблені стандартні методи розв’язання. В статті розглядається задача розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця. Запропоновано математичну модель, що дозволяє застосувати класичні методи математичного програмування для отримання оптимального розв’язку.

Змістовна постановка задачі. Нехай в заданій області $\Omega \in R^n$ розміщено N посадкових місць $n^j \in \Omega, j \in [1:N]$ та K контрольних точок $y^k \in \Omega, k \in [1:K]$. На посадкові місця необхідно розмістити N джерел фізичного поля $D_i, i \in [1:N]$ таким чином, щоб максимальне із значень фізичного поля в контрольних точках було мінімальним. Кожне джерело фізичного поля може займати лише одне посадкове місце та на одне посадкове місце повинно призначатися лише одне джерело.

Фізичне поле, що утворюється розміщеними джерелами та крайовими умовами на межі області *Ω*, описується лінійною задачею математичної фізики.

Вперше постановка задачі в такому вигляді була сформульована Стояном Ю.Г. та Путятиним В.П. у 70-х роках. [1] Запропонована ними математична модель виглядала наступним чином:

Нехай $y^k \in \Omega, k \in [1:K]$ − контрольні точки, вектор $Z = (Z^1, Z^2, ..., Z^N)$ задає розміщення джерел, а Z^i визначає положення $i-того$ джерела в області і співпадає з координатами його полюсу $p^i, i \in [1:N]$.

Фізичне поле описується таким чином:

$$Lu = f(y, Z),$$

$$B_j u = \varphi, \quad j \in [1:J],$$

де $L, B_j, \quad j \in [1:J]$ − лінійні диференційні оператори,

$$f(y, Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), \ \text{якщо} \ y \in D_i \\ 0, \ \text{якщо} \ y \in \bigcup_{i=1}^{N} D_i \end{cases}$$

$$f(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z) \to \min$$

Для знаходження розв’язку було запропоновано метод, названий гібридним. Розв’язання в ньому здійснювалось в три етапи, на яких використовувались: метод випадкового пошуку Монте-Карло; метод околів, що звужуються; метод вектору спаду.

Швидкість збіжності цього методу виявилась дуже низькою. В зв'язку з цим актуальною була побудова інших методів. В рамках семінару було розроблено наступну математичну модель задачі, яка має зручний вид для розв’язання.

Керовані змінні.

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, \text{якщо } i - \text{те джерело не призначається на } j - \text{те місце} \\ 1, \text{якщо } i - \text{те джерело призначається на } j - \text{те місце} \end{cases} \tag{1}$$

Обмеження.

Так як кожне джерело може займати лише одне посадкове місце та на одне посадкове місце повинно призначатися лише одне джерело, то керовані змінні повинні задовольняти наступним умовам:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N] \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N] \end{cases} \tag{2}$$

Функція цілі.

Якщо c_{ij}^{k} – вклад *i-того* джерела, що знаходиться на *j-тому* посадковому місці в значення поля в *к-тій* контрольній точці, то після розміщення всіх джерел значення фізичного поля (за властивістю адитивності) в цій точці може бути представлено наступним чином:

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij}, \quad k \in [1:K] \tag{3}$$

Тоді функція цілі може бути записана так:

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min \tag{4}$$

На основі ідеї Зойтендейка маємо:

$$f_k(x) \le z, \quad k \in [1:K] \tag{5}$$

$$f(x,z) = z \to \min \tag{6}$$

В результаті математична модель задачі приймає вигляд:

$$z \to \min \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij} \le z, \quad k \in [1:K] \\ \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad j \in [1:N] \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \quad i \in [1:N] \end{cases} \tag{8}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \tag{9}$$

Задача (7)-(9) відноситься до класу задач частково цілочисельного лінійного програмування, що дозволяє використовувати класичні методи математичного програмування для знаходження оптимального розв’язку.

Для розв’язання задачі була побудована модифікація методу Ленд і Дойг, яка враховувала особливості її математичної моделі [2]. В порівнянні з класичним методом Ленд і Дойг, де на кожному наступному розгалуженні збільшується розмірність отриманих підзадач, модифікація дозволяє отримувати відповідні підзадачі зі зменшенням їх розмірності.

Також, наразі програмно реалізується розв’язання задачі (7) - (9) Другим алгоритмом Гоморі з використанням паралельних обчислень.

В подальшому планується отримати порівняльні характеристики часу роботи зазначених алгоритмів і визначити який з них має більшу швидкодію.

Література

1. Стоян Ю. Г., Путятин В. П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. – Киев: Наукова думка. – 1988. – 192.с 2.

2. Яремчук С.И., Таценко В.А., Шупиков А .А. Модификация метода Ленд и Дойг решения минимаксной задачи размещения источников физического поля // Математическое моделирование. оптимизация и информационные технологии: материалы 5-й междунар. науч. науч. конф.(Кишинэу, 22-25 марта 2016 г.) Кишинэу: Эврика, 2016. Т. II. С. 386-402