Морозов А.В., к.т.н., доцент,
Житомирський державний технологічний університет

СВОЙСТВА I-ДЕРЕВА И СПОСОБ ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ

Под *i*-деревом $T = V, E_i$ будем понимать подграф полного графа $H_n = V, E_n$, который содержит дерево, стягивающее множество вершин $V \setminus i$, и два ребра, инцидентные вершине *i*, $i \in \{1, 2,\ldots, n\}$, $|V| = = n$. Рассмотрим особенности *i*-дерева *T*, открывающие возможность уменьшения погрешности приближенных алгоритмов решения симметрично задачи коммивояжера (СЗК).

В *i*-дереве *T* обозначим δ_k, $k = \overline{1, n}$, степень вершины *k*. Множество его вершин *V* представим разбиением на три подмножества V_1, V_2, V_3, где V_1 – множество вершин с единичной степенью (концевых или висячих вершин), V_2 – множество вершин со степенью 2, а $V_3 = V \setminus V_1 \cup V_2$.

Лемма. Для любого *i*-дерева графа $H_n = V, E_n$, $|V| = n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 3$, справедливо равенство

$$|V_1| = \sum_{k=1}^{n} \max \ \delta_k - 2, \ 0 . \qquad (1)$$

Доказательство. В *i*-дереве графа H_n число рёбер равно |*V*|. В любом графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу рёбер. Поэтому для *i*-дерева: $2\,|V| = 2\ |V_1| + |V_2| + |V_3| \ = \sum_{k=1}^{n} \delta_k$.

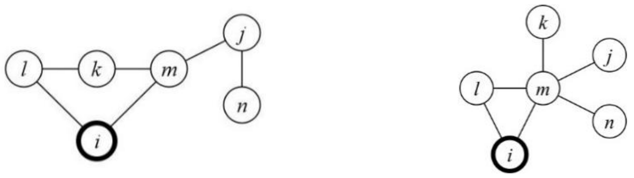
Тогда $|V_1| = \left(\sum_{i \in V_1} \delta_i - |V_1| \right) + \left(\sum_{i \in V_2} \delta_i - 2\,|V_2| \right) + \left(\sum_{i \in V_3} \delta_i - 2\,|V_3| \right) =$

$= \sum_{i \in V_3} \delta_i - 2 \ = \sum_{k=1}^{n} \max \ \delta_k - 2, \ 0 .$ □

В *i*-дереве графа $H_n = V, E_n$, представленном гамильтоновым циклом, $V = V_2$. Любое *i*-дерево по определению содержит единственный цикл. Отсюда следует, что в *i*-дереве $V_2 \neq \varnothing$. Обратно, связный граф $T = V, E_i$, $|V| = |E_i| = n$, в котором число вершин степени 2 меньше *n*, не является гамильтоновым. Кроме того, из (1) следует, что если в *i*-дереве *T* $V_3 \neq \varnothing$, то и $V_1 \neq \varnothing$. Заметим, что для любого *i*-дерева графа $H_n = V, E_n$ $1 \leq |V_1| \leq |V| - 3$.

На рис. 1 а) представлено *i*-дерево с единственной висячей вершиной, а на рис. 1 б) *i*-дерево, содержащее |*V*| – 3 висячих вершин.

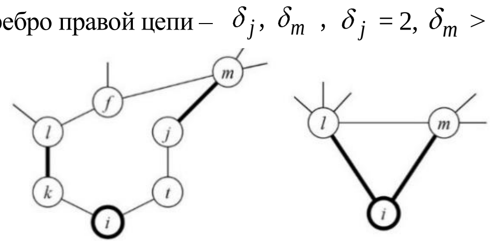
Пусть $T = V, E_i$ – связный подграф полного графа $H_n = V, E_n$, $|V| = |E_i| = n$. Назовем операцией 1-замены в *T* замену ребра из E_i на ребро из $E - E_i$, преобразующую *T* в связный граф с единственным циклом и с числом висячих вершин на единицу меньшим, чем в *T*.



а) б)

Рис 1. *а) i-дерево с единственной висячей вершиной;*
б) i-дерево с максимальным числом висячих вершин

Преобразование *i*-дерева $T = V, E_i$ в гамильтонов цикл полного графа H_n можно выполнить операциями 1-замены за полиномиальное время. Каждое ребро k, l *i*-дерева представим упорядоченной парой δ_k, δ_l, где δ_k, δ_l степени вершин *k*, *l* в *T*, $\delta_k \leq \delta_l$, $k, l \in \{1, 2,\ldots, n\}$. В *T* выделим левую и правую цепи, начинающиеся в вершине *i*. Каждая цепь заканчивается первой вершиной, степень которой больше 2. Обозначим последнее ребро левой цепи δ_k, δ_l, $\delta_k = 2$, $\delta_l > 2$, а последнее ребро правой цепи – δ_j, δ_m, $\delta_j = 2$, $\delta_m > 2$ (рис. 2).



а) б)

Рис. 2. *Левая и правая цепи, начинающиеся в вершине i:*
а) (i, k, l), (i, t, j, m); б) (i, l), (i, m); последнее ребро цепи изображено утолщенной линией

Теорема. Подграф полного графа $H_n = V, E_n$, представленный *i*-деревом $T = V, E_i$, $|V| = |E_i| = n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, корректно преобразуется в гамильтонов цикл за время $O\ n|V_1|$, где $|V_1|$ – число висячих вершин в *T*.