Стецюк П.И., д.ф.-м.н., зав. отд.,
Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины
Соломон Д.И., д.т.н., ректор,
Академия транспорта, информатики и коммуникаций,
Республика Молдова

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Задача коммивояжера состоит в нахождении кратчайшего маршрута (цикла), проходящего через n городов (вершин), расстояния между которыми $d_{ij} \ge 0$, $i, j = 1,...,n$, $i \ne j$. Она может быть сформулирована как задача смешанного булевого линейного программирования с полиномиальным от n количеством ограничений. Таких формулировок много, но центральные из них всего две. Первая [1, стр 45] использует ограничения, которые предложены в [2] для того, чтобы маршрут, проходящий через n вершин, был связным. Во второй, которую рассмотрим ниже, за связность маршрута отвечают ограничения, предложенные в [3].

Пусть булева переменная x_{ij} равна единице, если в цикл входит дуга (i, j), и равна нулю в противном случае. Пусть неотрицательная переменная z_{ij} задает величину потока некоторого продукта от вершины i к вершине j. Вторая формулировка для задачи коммивояжера имеет вид: найти

$$d^* = \min_{x_{ij} \in \{0,1\},\, z_{ij} \ge 0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\}, \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\dots,n, \qquad (2)$$

$$z_{ij} - (n-1) x_{ij} \le 0, \quad i, j = 1,...,n, \quad i \ne j, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{1i} = (n-1), \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} z_{ji} - \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} z_{ij} = 1, \quad i = 2,\dots,n. \qquad (5)$$

Она содержит $2n(n-1)$ переменных и $n(n+2)$ ограничений. Если $n=100$, то количество переменных и ограничений измеряется десятками тысяч. Задачи такого размера могут успешно решаться с помощью программ Gurobi 6.5.0 и CPLEX 12.6.2.0 из NEOS-солвера [4]. Оценить время решения подобных задач можно по результатам решения задач коммивояжера, приведенным в таблице

tsp	d^*	Gurobi 6.5.0			CPLEX 12.6.2.0		
		t_1	t_2	t_1/t_2	t_1	t_2	t_1/t_2
kro100A	21282	1522.55	80.25	18.97	2088.73	78.49	26.61
kro100B	22141	458.95	99.45	4.61	434.85	132.25	3.29
kro100C	20749	258.46	60.43	4.28	466.19	109.69	4.25
kro100D	21294	272.29	60.58	4.49	651.16	76.8	8.48
kro100E	22068	153.74	139.86	1.10	522.59	95.26	5.49

Здесь для пяти известных графов kro100A $\div$ kro100E из библиотеки TSPLIB приведены t_1 и t_2 – затраты (в секундах) для двух форм записи задачи (1)–(5). Они вычислялись с помощью функции "_solve_time". Первая форма соответствует задаче (1)–(5) и является более экономной по количеству ненулевых элементов, чем вторая форма, где ограничения вида (2) включают равенство для входящих в вершину и выходящих из вершины дуг.

В заключение отметим, что программы **gurobi** и **cplex** можно использовать для решения задач размещения источников физического поля, которые в Житомирском государственном технологическом университете исследуются С.И. Яремчук и ее учениками. Опыт применения программы **gurobi** для таких задач можно найти в [5].

Литература.

1. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Исследование операций. Том II. – Кишинэу, Эврика, 2008. – 592 с.
2. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulation of travelling salesman problem. – J. ACM, 1960, 3, P. 326-329.
3. Gavish B., Graves S.C. The travelling salesman problem and related problems. – Working Paper OR-078-78, 1978. – Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA.
4. NEOS Solver [Электронный ресурс]: http://www.neos-server.org/neos/solvers/. – Режим доступа: свободный.
5. Стецюк П.И., Ляшко В.И., Яремчук С.И. О решении минимаксных задач размещения источников физического поля // Журн. обчислювальної та прикладної математики. – 2014. – № 3(117). – С. 140–150.