Шарифов Ф.А., д.т.н., професор,
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины

ПАРОСОЧЕТАНИЯ И СУБМОДУЛЬЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

В следующих задачах требуется найти подграфы содержавшие хотя бы одно совершенное паросочетание.

1. ***Задача составления оптимального расписания для работы водителей в туристических агентствах.***

Муниципальная транспортная компания должна разрабатывать расписание о дежурстве водителей для выполнения заданного количества туров ежедневно. Математическая формулировка приводилось на языке следующей задачи покрытия для множества,

$$\min\{px, \Pi x \le 1, x = 0 \vee 1\},$$

здесь Π – 0-1 матрица и столбец j представляет потенциальное ежедневное дежурство для водителя, т.е. $p_{ij} = 1$ если дежурство j может быть назначена для тура i, и $p_{ij} = 0$ в противном случае. Числа p_j – затраты связанные с дежурством j. E. Balas и W. Pulleyblank [1] отмечают, что в типичном случае матрица Π имеет 150--200 строк и 3000--4000 столбцов. Для генерации столбцов матрицы Π, т.е. для определения множества потенциальных дежурств был предложен другой подход; сначала были генерированы, не зависимо друг от друга, отдельно, до и после полудня части туров. Далее, список полных туров составлялся, как обеднения до и после полудня частей при условии, что эти две части сочетаются. Обычно количества до и после полудня части туров, не превышает 150, 200, соответственно. Содержание 3000–4000 столбцов в матрице Π объясняется, тем, что из 30000=150 х 200 возможных сочетаний до и после полудня частей, только 10–30% пар сочетались с учетом времени для начала и завершения туров, а также при соблюдении условии не совпадения маршрутов до и после полудня частей.

Пусть n и m количества до и после полудня туров, соответственно. Обозначим $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – q x n и q x m матрицы, элементы которых определены следующим образом.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ до полудня часть тура } j \text{ состовляет тур } i \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ } \textit{после} \text{ полудня часть тура } j \text{ состовляет тур } i \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Затраты связанные до и после полудня части туров обозначаются как c и d. Пусть двудольный граф $G = (V, U, E)$, где вершины из множества V соответствуют до, а вершины из U после полудня частям туров. Множество ребер E соответствует турам, если возможно сочетания до и после полудня части. В этих обозначениях, выше указанная задача покрытия может быть сформулирована следующим образом;
найти

$$\min cx + dy \tag{1}$$

при ограничениях

$$Ax + By \ge 1 \tag{2}$$

(x, y) *– вектор инцидентности для некоторого* $S \subseteq V \cup U$
такого, что подграф $G(S)$ *содержит совершенное*
паросочетание, (3)
найти совершенное паросочетание в $G(S)$ *положив*
$a_{ij} = c_i + d_j$ *для всех* $(i, j) \in E$, (4)

где $G(S)$ подграф графа $G = (V, U, E)$, определенного множеством вершин $S \subseteq V \cup U$.

E. Balas и W. Pulleyblank также показали, что, выпуклая оболочка множества допустимых векторов $z \in R^{V \cup U}$ по ограничениями (3) описывается следующими линейными равенствами или неравенствами.

$$0 \le z \le 1$$
$$z(V) - Z(U) = 0,$$
$$Z(S) - Z(l(S)) \le 0, \quad S \in V,$$

где $l(S)$ – подмножество вершин из U, которые смежные с вершинами из S.

2. Задача проектирования логистических схемы с робастной структурой.

В логистических схемах, доставка материалов от одного узла к другому должна осуществляется своевременно, что и является залогом успеха компании. Поэтому считается, что обусловленность своевременной доставкой материалов, приводит к принципу планирования поставок согласно концепции «точно в срок» (англ. just in time – JIT). Согласно этому принципу все виды деятельности организуются таким образом, что бы они совершались точно в тот срок, когда это необходимо. Другими словами, они не выполняются слишком рано (что положительно влияет на экономию складских затрат и площадей), и они не выполняются слишком поздно (что отрицательно сказывается на обслуживании заказчиков или потребителей).

Концепция JIT в полной мере полагается на поставщиков на основе долгосрочных соглашений. Один из способов для уменьшения или устранения уровня запасов состоит из качественного выбора узлов и число каналов цепи поставок, для своевременной доставки необходимых материалов в протяжении длительного время.

Условие робастности структуры логистической цепи поставок подразумевает осуществления поставок некоторых материалов от одного и того же поставщика, а также возможность приобретения всех необходимых видов материалов по одному на каждого поставщика в случае отсутствии различных материалов у поставщиков.

Пусть U – множество заданных материалов, V – множество возможных поставщиков этих материалов. В этих обозначениях задача определения логистической схемы с робастной структурой сводится к нахождению подграфа в двудольном графе $G=(V,U,E)$, содержавшего хотя бы одно совершенное паросочетание [2].

Отметим, что если в задаче речь идёт о создании цепи поставок для производства одного типа продукции, то в результате применения данной модели на практике, можно устранить уровень запасов. В тех случаях, когда речь идёт о выпуске множества типов продукции, то в результате применения данной модели, уровень запасов можно существенно уменьшить. Таким образом, данная модель позволит в обоих случаях уменьшить расходы на содержание запасов.

Для формулировки математической модели нахождения требуемого подграфа в $G=(V,U,E)$, на подмножествах $S \subseteq V \cup U$ определим функции $f(S)=\ |\eta(S) \cup \delta(S)|$ и $g(S)=|\eta(S)|$, где $\eta(S)$ множество ребер с конечными вершинами из S и $\delta(S)$ – ребра разреза (S, $(V \cup U)\setminus S$). При этом не трудно проверит, что $f(S)$ субмодулярная, $g(S)$ – супермодулярная функция. Многогранник

$$EP=\{x;\ x(S)\le f(S)-g(S),\ S\subseteq V\cup U\ \}$$

называется расширенным полимтроидом [3]. Пусть $\lambda_w=\deg(w)-1$, где $\deg(w)$ есть степенны вершины $w\in V\cup U$.

Теорема. Граф G содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда когда, вектор λ = (λ_w; $w\in V\cup U$) является базой расширенного полиматроида EP [2].

Согласно к этой теореме граф G содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда, если

$$\min\{f(S)-g(S)-\lambda(S); S\subseteq V\cup U\}\ge 0.$$

В [4] показано, что эта задача эквивалентна к задаче нахождения минимального разреза на сети, для решения которой предложен алгоритм с трудоемкости $O(|V\|U|)$.

Кроме этих результатов, на базе этой теоремы предложен математическая модель условии (3), число ограничения которой выражается как полином степени два, от числа вершин графа G.

Литература

1. E.Balas and W. Pulleyblank. The perfectly matchable subgraph polytope of a bipartite graph, Networks vol. 13 (1983). – pp. 495–516.
2. F. Sharifov. Perfectly matchable subgraph problem on a bipartite graph, RAIRO-Oper.Res, 44 (2010). – pp. 27–42.
3. M. Grotschel, L. Lovasz, A. Schrijver, Geometric algorithms and combinatorial optimization, Berlin, Springer, 1988. – 320 p.
4. Ф.А. Шарифов. Нахождение минимального разреза с использованием базы расширенного полиматроида. Кибернетика и системный анализ. – № 12, 1996. – с. 138–152.