Семёнов В.В., д.ф.-м.н., профессор,
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ С РАСХОЖДЕНИЕМ БРЭГМАНА

Наиболее известным обобщением метода проекции градиента для вариационных неравенств является экстраградиентный алгоритм Г.М. Корпелевич. Этому алгоритму посвящено большое количество публикаций. В частности, предлагались модификации с одним метрическим проектированием на допустимое множество. Для вариационных неравенств одним из современных вариантов экстраградиентного метода является проксимальный зеркальный метод А.С. Немировского.

Настоящий доклад посвящен изучению нового метода экстраградиентного типа для приближенного решения вариационных неравенств с псевдомонотонными и липшицевыми операторами, действующими в конечномерном линейном нормированном пространстве. Данный метод является модификацией субградиентного экстраградиентного алгоритма с использованием расхождения Брэгмана вместо евклидового расстояния. К предлагаемой схеме можно прийти и путем замены допустимого множества на специальные опорные для него полупространства во втором этапе проксимального зеркального метода А.С. Немировского. Как и другие схемы использующие расхождение Брэгмана, предложенный метод иногда позволяет эффективно учесть структуру допустимого множества задачи. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены $O(1/N)$ неасимптотические оценки эффективности метода. Доказана теорема сходимости метода. А для случая монотонного оператора и компактного допустимого множества получены неасимптотические оценки эффективности метода.

Опишем алгоритм. Работаем в конечномерном действительном линейном пространстве, обозначаемом буквой E. Это пространство снабдим нормой $\|\cdot\|$. Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ будем обозначать через $\langle a,b \rangle$ значение линейной функции a в точке b. Двойственную норму на E^* обозначим $\|\cdot\|_*$.

Пусть C – непустое множество пространства E, A – оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство:

$$\text{найти } x \in C: \quad \langle Ax, y-x \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия: множество $C \subseteq E$ – выпуклое и замкнутое; оператор $A: E \to E^*$ – псевдомонотонный и липшицевый на C; множество S не пусто. Заметим, что при данных условиях множество S выпуклое и замкнутое.

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условия: $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ непустое выпуклое множество; φ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$; если $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ni x_n \to x \in \operatorname{bd}\operatorname{dom}\varphi$, то $\|\nabla\varphi(x_n)\|_* \to +\infty$; φ сильно выпукла относительно нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) + \langle \nabla\varphi(b), a-b \rangle + \tfrac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\, b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Соответствующие функции φ расхождение Брэгмана задается формулой

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - \langle \nabla\varphi(b), a-b \rangle \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\; b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Алгоритм 1.

Выбираем элемент $x_1 \in E$ и последовательность положительных чисел (λ_n). Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = \arg\min_{y \in C} \left(\lambda_n \langle Ax_n, y - x_n \rangle + V(y, x_n) \right).$$

Шаг 2. Если $y_n = x_n$, то СТОП, иначе вычислить

$$x_{n+1} = \arg\min_{y \in T_n} \left(\lambda_n \langle Ay_n, y - x_n \rangle + V(y, x_n) \right),$$

где

$$T_n = \left\{ z \in E: \ \langle \nabla\varphi(x_n) - \lambda_n Ax_n - \nabla\varphi(y_n), z - y_n \rangle \le 0 \right\}.$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.