Кушнир Н.А., асистент,
Плечистый Д.Д., к.т.н., доцент,
Рудюк Л.В., к.ф.-м.н., старший викладач,
Житомирский государственный технологический университет

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОИСКА КРАТЧАЙШЕГО ЗАМКНУТОГО ГАМИЛЬТОНОВОГО МАРШРУТА В ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ФОРМЕ

Пусть $X=\left[x_{ij}\right]_n$ – матрица перестановки $\pi=\ \pi\ 1\ ,\pi\ 2\ ,...\pi\ n\ \ :\ x_{i\pi\ i}=1,\ i=\overline{1,n},\ \pi\ i\in 1,2,...,n\ ;\ x_{ij}=0$ во всех остальных случаях. Каждому элементу $i\in 1,2,...,n$ поставим во взаимооднозначное соответствие элемент $\pi\ i$, определив тем самым подстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi\ 1 & \pi\ 2 & ... & \pi\ n \end{pmatrix}.$$

Все подстановки данной степени n разобьем на два класса. К первому классу отнесем все циклические подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \tau\ 1 & \tau\ 2 & ... & \tau\ n \end{pmatrix},$$

т.е. такие, в цикловом разложении которых имеется лишь один цикл длины n, ко второму – все остальные. Перестановку, соответствующую циклической подстановке, обозначим $\tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n$ и назовем циклической перестановкой.

Пусть $\left[d_{ij}\right]_n$ – квадратная матрица порядка n, в которой

$$d_{ij}=\begin{cases} d_{ij}, \text{ если } i\neq j, \\ \infty \text{ иначе}, \end{cases} \qquad (1)$$

$d_{ij}\in Z_0^+$, Z_0^+ – множество целых неотрицательных чисел.

В матрице $\left[d_{ij}\right]_n$ рассмотрим диагональ $\Pi=\ d_{1\pi\ 1}\ ,d_{2\pi\ 2}\ ,...,d_{n\pi\ n}$, соответствующую произвольной перестановке $\pi=\ \pi\ 1\ ,\pi\ 2\ ,...,\pi\ n$. Так как π является перестановкой номеров столбцов матрицы $\left[d_{ij}\right]_n$, то обозначим элемент $d_{i\pi\ i}$ диагонали Π через $d_{\pi\ i}$.

По матрице $\left[d_{ij}\right]_n$ построим полный ориентированный мультиграф G с n вершинами, в котором каждая пара вершин i,j , $i\neq j$, соединена парой дуг i,j и j,i с весами или стоимостями d_{ij} и d_{ji} .

Задача поиска кратчайшего замкнутого гамильтонового маршрута фломулируется следующим образом.

В полном ориентированном мультиграфе G требуется найти контур с наименьшей суммой весов входящих в него дуг, и проходящий через каждую вершину в точности один раз.

Последовательность $\tau=\ \tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n\ ,\tau\ 1$, соответствующую циклической перестановке $\tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n$, назовем обходом.

Допустимым решением ЗК, очевидно, является обход $\tau=\ \tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n\ ,\tau\ 1$, определяющий в мультиграфе замкнутый маршрут $\tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n\ ,\tau\ 1$, в котором все номера $\tau\ 1\ ,\tau\ 2\ ,...,\tau\ n$ из $1,2,...,n$ различны. Определим стоимость обхода τ в G:

$$D\ \tau\ =d_{\tau\ 1\ \tau\ 2}+d_{\tau\ 2\ \tau\ 3}+...+d_{\tau\ n-1\ \tau\ n}+d_{\tau\ n\ \tau\ 1}=\sum_{i=1}^{n}d_{\tau\ i}\ .$$

Сформулируем ЗК в перестановочной форме.

Требуется найти в матрице $\left[d_{ij}\right]_n$, элементы которой удовлетворяют условию (1), циклическую перестановку номеров столбцов $\tau^*\ 1\ ,\tau^*\ 2\ ,...,\tau^*\ n$ с минимальным суммарным весом соответствующего ей обхода τ^*:

$$D\ \tau^*\ =\min_{\tau}\sum_{i=1}^{n}d_{\tau\ i}\ .$$

Если ограничить значения матрицы $\left[d_{ij}\right]_n$ условием $d_{ij}=d_{ji}$, то получим симметричную ЗК. В этом случае матрице $\left[d_{ij}\right]_n$ отвечает полный неориентированный граф с n вершинами, где ребро i,j , $i\neq j$, $i,j=\overline{1,n}$, имеет вес d_{ij} .