Морозов А.В., к.т.н., доцент,
Летошко А.И., аспирант,
Житомирский государственный технологический университет

ПАРОСОЧЕТАНИЯ В МОДЕЛЯХ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

Наряду с задачами маршрутизации к оптимизационным задачам транспортной логистики можно отнести и те, которые формулируются в терминах теории паросочетаний.

Задача о паросочетании (ЗП) состоит в построении в графе G максимального паросочетания. ЗП является частным случаем задачи о взвешенном паросочетании (ЗВП), в которой задан граф $G = (V, W)$ и каждому ребру $v_i, v_j \in W$ приписан вес $d_{ij} \geq 0$. Предполагается найти в G паросочетание M_{max} с минимальной (максимальной) суммой весов ребер. В зависимости от содержательной интерпретации поиск решения ЗП или ЗВП выполняется в произвольном графе $H = (V, U)$ или в двудольном графе.

Одной из первых ЗВП является классическая задача о назначениях (ЗН), получившая следующую логистическую формулировку. Число пунктов производства n равно количеству ТС и числу пунктов назначения. В каждом пункте потребления i находится одно ТС, которое после выполнения маршрута стоимостью d_{ij} в каком-либо пунктов потребления $j, i, j = \overline{1, n},$ остается в этом пункте. Нужно найти все n маршрутов i, j, минимизирующих их суммарную стоимость.

Решение ЗН ищется в двудольном взвешенном графе $D = (X, Y, E)$, где $|X| = |Y|$, $E = \{i, j \mid i \in X, j \in Y\}$ и соответствует совершенному паросочетанию с минимальной суммой весов его ребер.

В настоящее время известно несколько задач транспортного типа, решения которых представлены паросочетаниями в двудольных графах.

Например, пусть в задаче об «упаковке в контейнеры» грузовместимость контейнера не превышает B, а вес груза d_i, $i = \overline{1, n},$ удовлетворяет неравенствам $B/3 < d_i \leq B.$ Тогда минимальное число контейнеров для размещения в них всех грузов можно определить следующим образом. Строится граф $H = (V, U)$ из множества вершин V и множества U ребер $\{i, j\}$. Вершины i и j образуют ребро $\{i, j\}$ если $d_i + d_j \leq B.$ Очевидно, искомое множество контейнеров является максимальным паросочетанием графа H.

Надо заметить, что для решения ЗН, ЗП и ЗВП известны эффективные алгоритмы, базирующиеся на нетривиальных идеях, реализация которых требует немалых временных затрат.

Паросочетания моделируют множество приложений, имеющих отношение к задачам типа коммивояжера. Маршрут в задаче коммивояжера (ЗК) является связным остовным подграфом, в котором все вершины имеют степень 2. Если в таком подграфе исключить условие связности, то он называется 2-фактором. Очевидно, что 2-фактор представляет собой обобщение понятия совершенного паросочетания. Поэтому задачу 2-фактор – задачу нахождения в произвольном графе $H = (V, U)$ с неотрицательными весами ребер 2-фактора, доставляющего их минимальный суммарный вес, можно рассматривать как ослабленную ЗК. Известно, что задача нахождения 2-фактора полиномиально сводится к построению совершенного паросочетания и, следовательно, эффективно разрешима. Этот факт указывает на возможность применения ЗН, ЗВП и задачи 2-фактор в качестве релаксаций для вычисления оценок, ограничивающих снизу значение целевого функционала в точных и приближенных методах решения задач маршрутизации, сводимых к ЗК.

Релаксацией задачи комбинаторной оптимизации называется некоторая другая задача, в множестве допустимых решений которой взаимно однозначно отображается (вкладывается) допустимое решение исходной. Известной релаксацией ЗК, которая не относится к задачам построения паросочетаний, является задача нахождения в полном n-вершинном взвешенном графе i-дерева с минимальным суммарным весом ребер; i-дерево – это подграф полного графа, включающий дерево с множеством вершин $V \setminus \{i\}$, $|V| = n$, и два ребра, инцидентные вершине i. Естественно, решение этой задачи дает более грубую нижнюю оценку минимума функционала ЗК, чем решения рассмотренных выше задач, но находится за существенно меньшее время.