Стеля О.Б., к. фіз.-мат.н, зав. лабораторією,
Потапенко Л.І., к. т.н, мол. наук. співробітник,
Сіренко І.П., провідний інженер,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ПАРАМЕТРИЧНОЇ СПЛАЙНОВОЇ КРИВОЇ ТИПУ БЕЗ'Є ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

Запропоновано алгоритм побудови параметричної сплайнової кривої, що має третій степінь та властивості, які є зручними при практичному використанні. Це дослідження є продовженням роботи [1], де пропонується алгоритм побудови кубічної сплайнової кривої. Побудовано системи алгебраїчних рівнянь з тридіагональними матрицями для обчислення коефіцієнтів сплайнової кривої. Наведено умови існування та єдиності такої кривої.

Запропонована крива має третій степінь і зберігає гладкість C^1 для будь-якої кількості управляючих точок з довільним розташуванням. Особливістю запропонованого алгоритму є задання в абсцисах управляючих точок деяких невідомих значень сплайну, які знаходяться з умов неперервності перших похідних кривої у цих точках.

На вході алгоритму ми маємо послідовність управляючих точок $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N)$. Ця послідовність може задаватись інтерактивно користувачем. Утворимо ламану лінію, з'єднавши кожні сусідні точки послідовності відрізками прямої лінії та визначимо довжину кожного такого відрізку:

$$h_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2},\ i = \overline{2, N}. \qquad (1)$$

Визначимо:

$$\tau_1 = 0,\ \tau_i = \sum_{j=2}^{i} h_j,\ i = \overline{2, N}. \qquad (2)$$

На кожному відрізку визначимо деякі точки η_i, тоді:

$$\tau_1 = \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_N < \tau_N,\ \tau_{i-1} < \eta_i < \tau_i,\ i = \overline{2, N}. \qquad (3)$$

Позначимо: $\mu_i = \tau_i - \eta_i$. В точках η_i сплайнова крива, яку ми будуємо, буде дотикатись до відповідного відрізку ламаної.

Ця крива параметрично задається двома сплайнами третього степеня $S_x(t)$ та $S_y(t), t \in [\tau_1, \tau_N]$. Візьмемо точки τ_i за вузли сплайнів, а точки η_i – за кратні вузли інтерполяції. Далі будуємо кубічні сплайни дефекту 2 на інтервалі $[\tau_1, \tau_N]$,

Позначимо через ϕ_i, ψ_i, $i = \overline{1, N}$ невідомі значення функцій $S_x(t)$ та $S_y(t)$ у вузлах сплайна τ_i.

Для визначення ϕ_i, ψ_i будуються дві системи алгебраїчних рівнянь. Ці системи визначаються з умов неперервності перших похідних функцій $S_x(t)$ та $S_y(t)$ в точках $t = \tau_i$:

$$A_i\phi_{i-1} - (C_i^{(1)} + C_i^{(2)})\phi_i + B_i\phi_{i+1} = \Phi_{x,i}, \qquad (4)$$

$$A_i\psi_{i-1} - (C_i^{(1)} + C_i^{(2)})\psi_i + B_i\psi_{i+1} = \Phi_{y,i},\ i = \overline{2, N-1}, \qquad (5)$$

де:

$$A_i = \frac{\mu_i^2}{(h_i - \mu_i)^2 h_i},\ C_i^{(1)} = \frac{2h_i + \mu_i}{\mu_i h_i},\ C_i^{(2)} = \frac{3h_{i+1} - \mu_{i+1}}{(h_{i+1} - \mu_{i+1})h_{i+1}},\ B_i = \frac{(h_{i+1} - \mu_{i+1})^2}{h_{i+1}\mu_{i+1}^2},$$

Для замикання системи рівнянь додаємо умови:

$$\phi_1 = x_1,\ \phi_N = x_N,\ \psi_1 = y_1,\ \psi_N = y_N.$$

Системи рівнянь мають тридіагональні матриці. В роботі [1] показано, що матриці систем рівнянь (5)–(8) мають діагональну перевагу за умов $\frac{1}{3} \le \alpha_i \le \frac{2}{3}$, де $\alpha_i = \frac{\mu_i}{t_i}$. Ці умови гарантують існування та єдиність розв'язку систем рівнянь, а значить і самої кривої.

Проведені числові розрахунки показали, що одержана параметрична крива добре наслідує форму, задану управляючими точками. Запропонована крива може бути використана в системах комп'ютерної графіки та комп'ютерних системах технічного проектування.

Література:

1. Stelia, O., Potapenko, L., Sirenko, I. Application of piecewise-cubic functions for constructing a Bezier type curve of C^1 smoothness, Eastern European Journal of Enterprise Technologies 2 (4-92) (2018) 46-52. doi:10.15587/1729-4061.2018.128284.