Марчук Д. К., асистент кафедри комп'ютерних наук,
Марчук Г. В., старш. викладач кафедри комп'ютерних наук
Державний університет «Житомирська політехніка»

АФІННІ ПЕРЕТВОРЕННЯ - ТРАНСФОРМАЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ

На сьогодні комп'ютерна графіка – це наукова область, що має безліч застосувань. Вона широко застосовується в різних сферах діяльності людини: будівництві та архітектурі, промисловості, в комп'ютерних іграх та кіноіндустрії. Крім того графіка знайшла своє місце і в медицині (візуалізація результатів КТ), астрономії, картографії, фотограмметрії і в багатьох інших областях знання.

Найбільш часто в комп'ютерній графіці для перетворення об'єктів використовуються, так зване афінне перетворення (affine transforma-tions). Перетворення площини (зображення) називається афінним, якщо воно взаємно однозначно і відображенням будь-якої прямої є пряма. Взаємно однозначне перетворення переводить кожну точку площини (зображення) *P* в іншу точку площині (зображення) *P'*, таким чином, що кожній точці *P* відповідає якась точка *P'*. Крім повороту, відображення, стиснення і розтягування (все це підгрупи афінних перетворень) геометричних об'єктів, здійснює ще зрушення їх у просторі (іноді кажуть, трансляцію). Так як афінне перетворення це композиція лінійного перетворення і паралельного перенесення то розглянемо его на прикладі побудови фракталу.

Геометричні фрактали – самі наочні, тому що в них відразу видно самоподібність. Найчастіше фрактали викреслюються у вигляді плоского зображення, тому буде розглянуто двовимірний випадок. У цьому випадку точка $x=(x_1,x_2)$, яка зазнала на собі афінні перетворення, отримає просторову локалізацію $x^{'}=(x^{'}_1,x^{'}_2)$, що в аналітичній формі виражається як

$$[x_1^{`}, x_2^{`}, 1] = M[x_1, x_2, 1]$$

де M - лінійне перетворення.

Розглянемо фрактал під назвою дерево Піфагора, в основі якого лежить одна єдина буква «Y».

Для створення дерева Піфагора потрібно за допомогою афінних перетворень злегка зменшити і розгорнути в просторі об'єкт, з якого складається фрактал. Для початку нехай фігура ABCBD (рис.1.а) перетвориться у фігуру BCECF (рис.1.б).

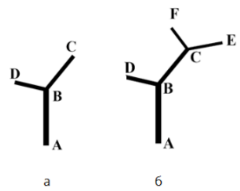

Рис. 1. Дерево Піфагора а) фігура до застосування методів афінного перетворення; б) фігура після першого кроку.

Для цього перетворення потрібно зробити наступні кроки:

1. Встановити точку повороту в точці A.
2. Повернути об'єкт.
3. Стиснути об'єкт.
4. Перемістити об'єкт.

Для встановлення точки повороту обчислюємо матрицю перенесення (1).

$$[T_{-A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_x & -a_y & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Далі необхідно обчислити кут μ між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ та матрицю повороту (2).

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\mu) & \sin(\mu) & 0 \\ -\sin(\mu) & \cos(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Наступнім кроком необхідно обчислити коефіцієнт стиснення $\beta = \overline{BC}/\overline{AB}$ після чого матрицю стиснення (3).

$$[D] = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Для перенесення об'єкту в точку B обчислюємо матрицю перенесення (4).

$$[T_B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b_x & b_y & 1\end{bmatrix} \qquad (4)$$

Підсумкова матриця буде виглядати наступним чином:

$$[M]=[T_{-A}][R][D][T_B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -a_x & -a_y & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\mu) & \sin(\mu) & 0\\ -\sin(\mu) & \cos(\mu) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ b_x & b_y & 1\end{bmatrix}$$

$$[M]=\begin{bmatrix}\beta*\cos(\mu) & \beta*\sin(\mu) & 0\\ -\beta*\sin(\mu) & \beta*\cos(\mu) & 0\\ -\beta*a_x\cos(\mu)+\beta*a_y\sin(\mu)+b_x & -\beta*a_x\sin(\mu)-\beta*a_y\cos(\mu)+b_y & 1\end{bmatrix}$$

В результаті чого отримуємо:

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x \quad y \quad 1][M]$$

$$[x' \quad y' \quad 1]=[x \quad y \quad 1]=$$

$$=\begin{bmatrix}\beta*\cos(\mu) & \beta*\sin(\mu) & 0\\ -\beta*\sin(\mu) & \beta*\cos(\mu) & 0\\ -\beta*a_x\cos(\mu)+\beta*a_y\sin(\mu)+b_x & -\beta*a_x\sin(\mu)-\beta*a_y\cos(\mu)+b_y & 1\end{bmatrix}$$

Аналогічні дії проводимо для об’єктів ABCBD → BDGDH, де

- μ - кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$
- β - коефіцієнт стиснення $\beta=\overline{BD}/\overline{AB}$

В результате застосування афінних перетворень побудовано фрактал дерево Піфагора (рис.3)

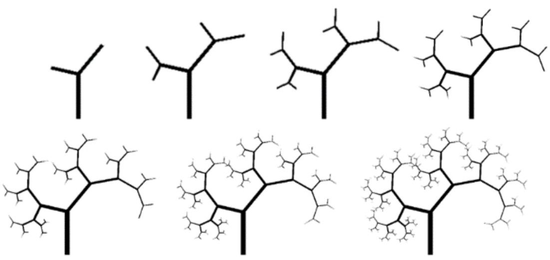

Рис.3. Етапи побудови дерева Піфагора

У комп’ютерній графіці фрактали широко застосовуються завдяки компактності математичного апарату. Фрактальні дерева, гори і цілі пейзажі задаються простими формулами а за допомогою простих розрахунків можна побачити що може афінне перетворення.