

## ПРОГРАМНО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ОБ'ЄКТА У 3D-ПРОСТОРІ НА ОСНОВІ ДУАЛЬНИХ КВАТЕРНІОНІВ

В задачах програмування ігор досить часто виникає завдання відображення руху ігрових об'єктів у 3D-просторі, що призводить до необхідності моделювання їх динамічних і кінематичних рухів. Задача ще більше ускладнюється коли необхідно проводити моделювання груп рухомих об'єктів та їх взаємодію між собою і навколишнім середовищем.

Опис переміщень (руху) об'єктів у просторі доцільно проводити з використанням математичних моделей – систем рівнянь руху. Переміщення будь-якого рухливого об'єкта можна подати як сукупність поступального та обертального руху, а швидкість об'єкта – як комбінацію поступальної та обертальної швидкостей. Останнім часом у літературі багато уваги приділяється опису обертального руху кватерніонами, поступальний рух частіше всього моделюють системами диференціальних рівнянь з урахуванням діючих сил та прискорень. За необхідності моделювати узгоджений рух багатьох об'єктів, моделі перетворюються у складні і громіздкі системи диференціальних рівнянь, що не завжди можна легко розв'язати. Тому для спрощення рішення цієї задачі пропонується застосовувати математичний апарат дуальних кватерніонів, що дозволяє моделювати як обертальний, так і поступальний рух об'єкта. При цьому сам рух подається як перетворення ортогональних базисів, а модель переміщення зводиться до операції множення дуальних кватерніонів.

У механіці дуальні кватерніони застосовуються в якості системи числення для подання жорстких перетворень в трьох вимірах. Оскільки простір дуальних кватерніонів є 8-мірним, а жорстке перетворення має шість дійсних ступенів свободи, три для зміщень і три для обертань, в цьому застосуванні використовуються дуальні кватерніони, що підкоряються двом алгебраїчним обмеженням.

Подібно до того, як обертання в тривимірному просторі можуть бути представлені кватерніонами одиничної довжини, жорсткі рухи в тривимірному просторі можуть бути представлені дуальними кватерніонами одиничної довжини.

Завдяки наявній розмірності дуальний кватерніон, (на відміну від кватерніону з розмірністю 4) дозволяє описати, як положення об'єкта в просторі, так і його орієнтацію.

Дуальний кватерніон можна представити у вигляді двох кватерніонів:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $\mathbf{q}_1$  - дійсна частина та  $\mathbf{q}_2$  - дуальна частина.

При моделюванні динамічних систем можна прийняти, що  $\mathbf{q}_1$  визначає орієнтацію об'єкта в просторі, а  $\mathbf{q}_2$  визначає положення об'єкта в просторі.

Для написання програмного забезпечення моделювання, було використано:

- Мову програмування JavaScript (ES6);
- Графічну бібліотеку Tree.js(WebGL);
- Бібліотеку для створення користувацьких інтерфейсів React.js;
- Бібліотеку UI елементів AntDesign.

Three.js дозволяє створювати пришвидшену на GPU, 3D-анімацію, використовуючи мову JavaScript як частину веб-сайту, не покладаючись на власні плагіни браузера. Це можливо завдяки появі WebGL. Створення складних тривимірних комп'ютерних анімації може бути дещо простішим завдяки бібліотекам високого рівня, таких як Three.js або GLGE, SceneJS, PhiloGL, а також ряд інших. Адаже ці бібліотеки відображаються в браузері без зусиль, необхідних для традиційного автономного додатку чи плагіна.

Було створено наступні класи:

- AirPlane – рухомий 3D об'єкт (літак);
- AirTransmitter – рухомий 3D об'єкт який за допомогою множення дуальних кватерніонів слідкує за AirPlane та змінює кути повороту в просторі;
- DualQuaternion – клас дуального кватерніона;
- Quaternion - клас кватерніона;
- MiniMap – клас дозволяє керувати активним об'єктом класу AirPlane.

Таким чином, дуальний кватерніон об'єднує переміщення і обертання в одну змінну стану. Це змінна стану пропонує надійний, од-нозначний, обчислювально ефективний спосіб представлення перетворення твердого тіла. Розроблене програмне забезпечення дозволило перевірити теоретичні результати та здійснити моделювання рухомих об'єктів у 3D-просторі.