Подчашинський Ю. О., д.т.н., проф., завідувач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
Чепюк Л. О., к.т.н., доц. кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки
Криворучко М. Г., студент гр. МТ-1м
Державний університет «Житомирська політехніка»

WAVELET-РЯДИ ДЛЯ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ІНФОРМАЦІЇ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

Формули для wavelet-перетворення дискретного часу не можна отримати простою дискретизацією відповідних формул для безперервного часу. Також неможливо визначити кратномасштабний аналіз для дискретних сигналів, оскільки не існує базисних функцій, масштабовані та зміщені версії яких давали б базис простору $L^2(R)$, простору квадратично сумованих послідовностей нескінченної довжини. Розглянемо, як можна отримати уявлення CWT у вигляді wavelet-рядів для дискретного часу (DTWS - discrete time wavelet set).

Нехай є деяка безперервна функція $f_0(x) \in V_0$. Дискретний сигнал c_n представимо як послідовність коефіцієнтів при масштабуючих функціях, за якими розкладається $f_0(x)$:

$$f_0(x) = \sum_n c_{0,n} \phi_{0,n}(x)\cdot$$

де $c_{0,n} = c_n$. Сигнал c_n інтерпретуємо як послідовність коефіцієнтів розкладання, отриманих під час кратномасштабного аналізу функції $f_0(x)$. Тоді можна обчислити апроксимації цієї функції, що належать до просторів $V_1, V_2, \ldots$. Простори $V_{-1}, V_{-2}, \ldots$ немає значення при даної інтерпретації.

Відповідно до концепції кратномасштабного аналізу, функція $f_0(x)$ декомпозується на дві функції $f_1(x) \in V_1$ і $e_1(x) \in W_1$:

$$f_0(x) = f_1(x) + e_1(x) = \sum_k c_{1,k} \phi_{1,k}(x) + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(x).$$

Таким чином, отримаємо дві нові послідовності, $c_{1,n}$ і $d_{1,n}$. Даний процес може бути продовжений для $f_1(x)$ і функція $f_0(x)$ (а також і послідовність c_n) буде представлена сукупністю коефіцієнтів $d_{m,n}, m \in Z^+, n \in Z$.

Однак обчислення поки що залежать від безперервних функцій $\phi(x)$ і $\psi(x)$. Покажемо, як обчислення DTWS можуть бути виконані з використанням операцій над дискретними сигналами.

З урахуванням того, що функція, що масштабує, утворює базис відповідного простору, можна отримати:

$$\begin{aligned} c_{1,k} &= \langle \phi_{1,k}(x), f_1(x) \rangle = \langle \phi_{1,k}, f_0(x) - e_1(x) \rangle = \left\langle \phi_{1,k}(x), \sum_n c_{0,n} \phi_{0,n}(x) \right\rangle \\ &= \sum_{n \in Z} c_{0,n} \langle \phi_{1,k}(x), \phi_{0,n}(x) \rangle = 2^{1/2} \sum_{n \in Z} c_{0,n} h_{n+2k}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким чином виявляється можливим ітеративне обчислення коефіцієнтів $c_{j,k}$ і $d_{j,k}$ без безпосереднього використання функцій $\phi(x)$ і $\psi(x)$. За аналогією з (1) можна записати для будь-якого j,

$$c_{j,k} = 2^{1/2} \sum_n c_{j-1,n} h_{n+2k}, \quad (2)$$

$$d_{j,k} = 2^{1/2} \sum_n c_{j-1,n} g_{n+2k}, \quad (3)$$

Отримавши таким чином повністю дискретний процес декомпозиції. Послідовності h_n і g_n називаються wavelet-фільтрами. Відмітимо, що $c_{j,k}$ і $d_{j,k}$ мають "половинну" довжину в порівнянні з $c_{j-1,k}$ хоча на даному етапі всі послідовності нескінченні.

Таким чином, не вводиться надмірність]. Зворотний процес полягає в отриманні c_{j-1} з c_j і d_j:

$$\begin{aligned} c_{j-1,n} &= \langle \phi_{j-1,n}, f_{j-1}(x) \rangle = \langle \phi_{j-1,n}(x), f_j(x) + e_j(x) \rangle \\ &= \left\langle \phi_{j-1,n}, \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k}(x) \right\rangle + \left\langle \phi_{j-1,n}, \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \right\rangle \\ &= \sum_k c_{j,k} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j,k}(x) \rangle + \sum_k d_{j,k} \langle \phi_{j-1,n}, \psi_{j,k}(x) \rangle \\ &= 2^{1/2} \sum_k c_{j,k} h_{n+2k} + 2^{1/2} \sum_k d_{j,k} g_{n+2k}. \end{aligned} \quad (4)$$

У цьому випадку підсумовування проводиться по іншим змінним, у порівнянні з формулами (2) і (3). Довжина послідовності c_{j-1} удвічі більше за довжину послідовності c_j або d_j.