

УДК 004.942

*Жеребцов Д.В., здобувач,
Сергійко В.М., здобувач,
Локтікова Т.М., ст. викладач
Державний університет «Житомирська політехніка»*

ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОРБИТАЛЬНОГО РУХУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ РІВНЯННЯ КЕПЛЕРА ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ АЛГОРИТМУ НЬЮТОНА-РАФСОНА

Ефективність імітаційних моделей космічного простору безпосередньо залежить від обраного математичного апарату прогнозування станів системи. Поширені методи чисельного інтегрування створюють значне навантаження на обчислювальні вузли через необхідність підтримки малого кроку часу для збереження точності. У даному дослідженні пропонується шлях оптимізації через впровадження аналітичного розв'язання задачі двох тіл із використанням алгоритму Ньютона-Рафсона. Даний метод дозволяє замінити ресурсномісткі ітеративні цикли інтегрування на прямі функціональні обчислення, складність яких залишається константною. Це гарантує стабільну продуктивність симуляції та детермінованість результатів незалежно від обраного часового масштабу чи тривалості моделювання.

Більшість імітаційних моделей використовують чисельні методи, а саме метод Ейлера, алгоритм Верле або методи сімейства Рунге-Кутти (RK2, RK4). Їхній спільний недолік полягає у накопиченні дискретизаційної похибки при збільшенні кроку часу. Для усунення цієї проблеми в роботі пропонується застосування аналітичного підходу, за якого просторовий стан системи описується набором незмінних кеплерівських елементів, а поточна позиція об'єкта обчислюється як строга функція від абсолютної епохи.

Центральною математичною проблемою цього підходу є необхідність визначення ексцентричної аномалії E шляхом розв'язання трансцендентного рівняння Кеплера [1]:

$$M = E - e \sin E,$$

де M – середня аномалія, e – ексцентриситет орбіти. Оскільки дане рівняння не має точного алгебраїчного розв'язку, у роботі застосовано ітеративний алгоритм Ньютона-Рафсона. Наближення кореня на кожному кроці обчислюється за формулою:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}.$$

Запропонований підхід дозволяє якнайшвидше знаходити просторові координати для будь-якого моменту часу без необхідності послідовного обчислення проміжних станів, що в свою чергу дозволяє повністю перенести навантаження з ітеративного інтегрування сил на одноразовий чисельний аналіз трансцендентних функцій.

Основним аспектом оптимізації у цьому контексті є архітектурна перевага аналітичного підходу при розробці систем реального часу. Заміна послідовного покрокового інтегрування обчисленням незалежних станів відкриває широкі можливості для паралелізації обчислень. Оскільки позиція кожного космічного тіла в аналітичній моделі залежить виключно від поточного часу, а не від попереднього стану системи, то розрахунок траєкторій великої кількості об'єктів можна ефективно розподілити між потоками сучасних багатоядерних процесорів або інтегрувати у обчислювальні конвеєри без необхідності синхронізації даних між потоками.

Для верифікації запропонованого підходу було розроблено дослідний програмний стенд (рис. 1). З метою уніфікації обчислень та мінімізації похибок заокруглення, параметри експерименту задані у системі безрозмірних канонічних одиниць. Такий підхід дозволяє оцінити відносну деградацію алгоритмів незалежно від конкретного масштабу фізичної системи.

Експеримент полягав у порівняльному аналізі траєкторій еліптичного руху за інтервали часу $T = 50$ та $T = 300$ при гравітаційному параметрі $\mu = 1$. Дослідження базувалося на обчисленні інтегральної середньоквадратичної похибки (RMSE) по всій довжині траєкторії, а також на аналізі збереження основних фізичних інваріантів: повної механічної енергії та моменту імпульсу. Для імітації умов дефіциту ресурсів у системах реального часу чисельні алгоритми були запущені з великим тестовим кроком $dT = 0.1$. Роль контрольних показників у дослідженні виконували два типи еталонів: результати класичного методу Рунге-Кутти 4-го порядку з екстремально малим кроком $dT = 0.00001$ для оцінки чисельної збіжності та аналітичний розв'язок на основі алгоритму Ньютона-Рафсона для верифікації фізичної точності.

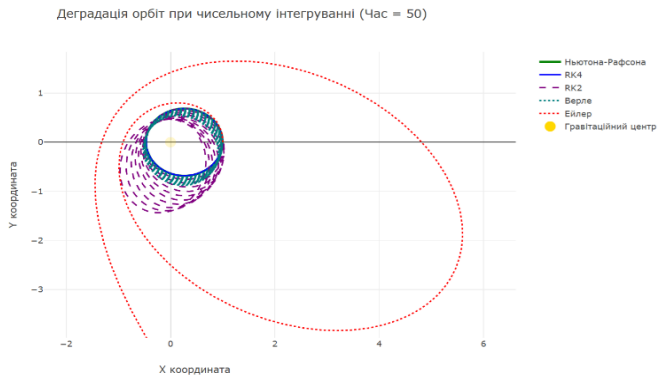


Рисунок 1 – Дослідний програмний стенд

Результати моделювання (табл. 1 – 2) демонструють проблему накопичення обчислювальної похибки в процесі покрокового чисельного інтегрування. За тривалій симуляції $T = 300$ метод Ейлера з тестовим кроком $dT = 0.1$ показав суттєве відхилення з фізичною RMSE понад 30 просторових одиниць та критичним порушенням закону збереження енергії.

Метод Верле за тих же умов очікувано продемонстрував ідеальне збереження моменту імпульсу, з похибкою на рівні $1.66 \cdot 10^{-15}$, що забезпечило йому значно вищу геометричну стабільність порівняно з методами Ейлера та Рунге-Кутти 2-го порядку.

Однак жоден чисельний метод не уникнув прогресуючого дрейфу. Спроба досягти високої математичної точності шляхом зменшення кроку до $dT = 0.00001$ вимагала виконання тридцяти мільйонів обчислювальних циклів, проте чисельний еталон RK4 все одно накопичив інтегральну фізичну похибку порядку $1.90 \cdot 10^{-10}$.

На протипагу чисельній апроксимації, запропонований аналітичний підхід із використанням ітеративного алгоритму Ньютона-Рафсона досягає машинної точності та не демонструє накопичення похибки у часі. Оскільки рівняння Кеплера є трансцендентним, то критерієм точності його розв'язку є внутрішня нев'язка – різниця між початковою середньою аномалією та її значенням, отриманим при зворотній підстановці знайденого кореня. Алгоритму знадобилося лише 5 ітерацій на один стрибок, щоб досягти нев'язки порядку $1.11 \cdot 10^{-16}$. Цей показник відповідає «машинному епсилону» – фундаментальній межі роздільної здатності дійсних чисел з плаваючою комою стандарту типу double. Досягнення цієї межі свідчить про те, що алгоритм обчислює позицію настільки точно, наскільки це фізично здатна зберегти

оперативна пам'ять процесора, і подальші відхилення зумовлені виключно апаратною дискретністю, а не похибкою методу.

Таблиця 1

Результати дослідження при T = 50

| Алгоритм та умови | Кроки | Крок (dT) | RMSE Фізична (до Рафсона) | RMSE Чисельна (до RK4 micro) | Похибка Енергії (ΔE) | Похибка Імпульсу (ΔI) |
|---------------------------------------|----------------------|----------------|---------------------------|------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Ньютона-Рафсона | 5 (1 стрибок) | Миттєво | 0.0000e+0 (немає) | 9.279094025122e-1 | 0.000000000000e+0 | 0.000000000000e+0 |
| Рунге-Кутта 4 (Тестове навантаження) | 500 | 0.1 | 8.781460474470e-2 | 8.781460474907e-2 | 3.003665103794e-3 | 8.354936819865e-4 |
| Рунге-Кутта 2 (Тестове навантаження) | 500 | 0.1 | 1.161709045398e+0 | 1.161709045398e+0 | 1.667203966371e-1 | 3.656866278216e-2 |
| Алгоритм Верле (Тестове навантаження) | 500 | 0.1 | 3.133822585691e-1 | 3.133822585652e-1 | 1.198762416590e-3 | 6.66138147751e-16 |
| Метод Ейлера (Тестове навантаження) | 500 | 0.1 | 4.232014940205e+0 | 4.232014940205e+0 | 6.629411283921e-1 | 8.024630435186e-1 |
| Метод Гільєра (Досягнення точності) | 5000000 | 0.00001 | 7.514810196012e-2 | 7.514810195574e-2 | 2.605066849044e-3 | 1.247429260898e-3 |
| Алгоритм Верле (Досягнення точності) | 5000000 | 0.00001 | 3.296673860724e-9 | 3.292699715107e-9 | 1.726774279120e-11 | 3.019806626980e-14 |
| Рунге-Кутта 2 (Досягнення точності) | 5000000 | 0.00001 | 1.249028876287e-8 | 1.248842099226e-8 | 4.75927075272e-11 | 6.805778163255e-11 |
| Рунге-Кутта 4 (Досягнення точності) | 5000000 | 0.00001 | 4.914637380954e-12 | 0.000000000000e+0 | 1.214583988940e-13 | 1.898481372100e-14 |

Таблиця 2

Результати дослідження при T = 300

| Алгоритм та умови | Кроки | Крок (dT) | RMSE Фізична (до Рафсона) | RMSE Чисельна (до RK4 micro) | Похибка Енергії (ΔE) | Похибка Імпульсу (ΔI) |
|---------------------------------------|----------------------|----------------|---------------------------|------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Ньютона-Рафсона | 5 (1 стрибок) | Миттєво | 0.0000e+0 (немає) | 9.264740768544e-1 | 1.110223024625e-16 | 2.220446049250e-16 |
| Рунге-Кутта 4 (Тестове навантаження) | 3000 | 0.1 | 8.741902873985e-1 | 8.741902873815e-1 | 1.780156449887e-2 | 4.977128619084e-3 |
| Рунге-Кутта 2 (Тестове навантаження) | 3000 | 0.1 | 4.187260072357e+0 | 4.187260072359e+0 | 6.115001035921e-1 | 7.44548531049e-2 |
| Алгоритм Верле (Тестове навантаження) | 3000 | 0.1 | 1.244088253511e+0 | 1.244088253511e+0 | 1.074197917263e-5 | 1.665334536938e-15 |
| Метод Ейлера (Тестове навантаження) | 3000 | 0.1 | 3.099532966250e+1 | 3.099532966250e+1 | 6.624408133286e-1 | 8.120430840150e-1 |
| Метод Гільєра (Досягнення точності) | 30000000 | 0.00001 | 8.444433288114e-1 | 8.444433288141e-1 | 1.485944251880e-2 | 7.240098174538e-3 |
| Алгоритм Верле (Досягнення точності) | 30000000 | 0.00001 | 2.001428836781e-8 | 2.016390882447e-8 | 3.513855872939e-13 | 3.8262938765883e-13 |
| Рунге-Кутта 2 (Досягнення точності) | 30000000 | 0.00001 | 7.559166937842e-8 | 7.573639590033e-8 | 1.035713957444e-11 | 2.021838225273e-11 |
| Рунге-Кутта 4 (Досягнення точності) | 30000000 | 0.00001 | 1.901163546506e-10 | 0.000000000000e+0 | 1.05415671882e-12 | 4.618527782441e-13 |

Проведений комплексний аналіз доводить, що заміна покрокового інтегрування методом прямого розрахунку станів, швидкість якого не залежить від часової дистанції, є фундаментально вищим рівнем оптимізації обчислювальних процесів. Такий підхід повністю усуває накопичення фазових і просторових похибок, гарантує дотримання законів збереження енергії та забезпечує абсолютну детермінованість макроскопічних систем при кардинальному зменшенні витрат процесорного часу.

Список використаних джерел:

1. Curtis H. D. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. 3rd ed. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2013. 751 p.

2. Tatum J. *Celestial Mechanics*. Victoria : University of Victoria, 2024. URL:

https://www.hlevkin.com/hlevkin/90MathPhysBioBooks/Mechanics/tatum_celestialMech.pdf